LAPORAN PENELITIAN
CLUSTER DASAR PENGEMBANGAN PRODI

TRACE MATRIKS 3 X 3
BERPANGKAT BILANGAN BULAT

PENELITI :

FITRI ARYANI, M.Sc
NIDN. 2013097702

LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2018

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirrobbil 'alamin ucap syukur ke hadirat Allah s.w.t, karena atas rahmat dan hidayahNyalah penelitian ini dapat diselesaikan. Semoga dengan adanya penelitian ini dapat menambah pengetahuan pembaca dibidang Aljabar, terutama bidang Matriks dan khususnya *Trace* Matriks. Penelitian ini adalah mengenai bagaimana menentukan bentuk umum dari suatu *trace* matriks khusus yang berorde 3 *x* 3 Berpangkat Bilangan Bulat.

Penelitian ini dilakukan dijurusan matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau. Waktu penelitian dimulai dari bulan Juni sampai Desember 2018. Peneliti berharap hasil penelitian ini banyak dibaca dan digunakan oleh bidang lain yang berhubungan dengan bentuk umum *trace* matriks khusus 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat.

Peneliti menyadari bahwa belumlah lengkap dan sempurna baik isi, tulisan maupun gaya bahasa yang digunakan dalam penelitian ini tanpa kritikan dan saran dari pembaca.

Ucapan terimakasih penulis sampaikan kepada Pimpinan Rektorat UIN Suska Riau atas didanainya pembuatan penelitian ini, tidak lupa ucapan terimakasih kepada rekan-rekan dosen dilingkungan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau terutama rekan-rekan Jurusan Matematika atas kritikan, masukkan-masukkan sehingga sangat membantu dalam penyelesaian Penelitian ini.

Pekanbaru, Desember 2018

Peneliti

TRACE MATRIKS 3 X 3

BERPANGKAT BILANGAN BULAT

ABSTRAK

Menghitung *trace* suatu matriks tidaklah begitu sulit, namun apabila matriks tersebut adalah matriks yang berpangkat bilangan bulat, maka untuk menghitung *trace*nya harus dipangkatkan terlebih dahulu sebanyak n kali. Sehingga untuk menghitung *trace* matriks berpangkat cukup rumit. Makalah ini akan membahas *trace* matriks bentuk khusus pertama dan bentuk khusus kedua 3×3 berpangkat bilangan bulat. Terdapat dua langkah dalam pembentukan bentuk umum *trace* matriks tersebut. Pertama, menentukan bentuk umum dari matriks berpangkat $({A_3}^n)$ dan $({B_3}^n)$, dan membuktikan bentuk umum$({A_3}^n)$ dan $({B_3}^n)$ tersebut menggunakan induksi matematika. Kedua, menentukan bentuk umum $tr\ ({A_3}^n)$ dan $tr\ ({B_3}^n)$, selanjutnya membuktikan kedua bentuk umum tersebut dengan pembuktian langsung. Dalam makalah ini diiperoleh hasil bentuk umum perpangkatan matriksnya hanya untuk bilaagan bulat positif. Untuk perpangkatan matriks bilangan bulat negatif tidak ada, disebabkan determinan dari matriks tersebut adalah nol. Artinya matriks tersebut tidak punya invers dan *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif tidak dapat ditentukan. Selanjutnya diperoleh juga *trace* matriks dari kedua bentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif tersebut adalah sama.

Kata kunci: *induksi matematika , pembuktian langsung, matriks berpangkat, trace.*

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pembahasan mengenai matriks merupakan suatu pembahasan yang sangat menarik, sebab matriks sangat banyak dibahas dalam berbagai bidang, diantaranya bidang ekonomi, biologi, kimia, pertanian dan tentunya matematika itu sendiri. Banyak hal yang dapat dilakukan dari suatu matriks, seperti perkalian matriks, determinan matriks, *Trace* matriks dan sebagainya. Pemaparan tiga hal tersebut yaitu: perkalian matriks dapat dilakukan apabila memenuhi syarat yaitu jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua. Selanjutnya menurut Howard Anton 1987, fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan kita definisikan $\det(A)$ sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A, dengan A adalah matriks bujur snagkar. Sedangkan *Trace* matriks adalah jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar yang ordonya 2×2. Penelitian ini mengkaji khususnya mengenai *trace* matriks berpangkat.

Proses mendapatkan *trace* matriks yang berpangkat, maka langkah pertama yang dilakukan adalah menerapkan aturan perpangkatan matriks, matriks harus dikalikan terlebih dahulu sebanyak pangkat yang diinginkan. Selanjutnya dengan menggunakan definisi *trace* maka didapatkan nilai *trace* dari hasil perkalian matriks tersebut. Yang menjadi permasalahan dari hal tersebut adalah proses yang panjang dalam pemangkatan matriks. Sehingga penelitian J. Pahade and M. Jha,(2015) sangat membantu mendapatkan *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif. Penelitian tersebut mendapatkan formula baru untuk menghitung *trace* dari matriks ukuran 2×2 yang berpangkat bilangan bulat positif, dengan hanya mensubtitusi nilai entri-entri dari matriks ke dalam formula tersebut, tanpa harus melalui proses yang panjang dengan metodepemangkatan matriks. Dengan materi yang sama, Fitri Aryani dan Solihin (2017) juga memperoleh formula yang baru untuk *trace* matriks ukuran 2×2 yang berpangkat bilangan bulat negatif.

Terdapat banyak penelitian lainnya yang berhubungan dengan *trace* matriks. Penelitian pada tahun 2008, Zarelua, A.V membahas mengenai *trace* pada matriks berpangkat bilangan bulat berhubungan dengan kekongruenan persamaan Euler. Suatu hal yang penting yang sangat penomena dalam matematika yang menyatakan bahwa $Tr\left(A^{p^r}\right) = Tr\left(A^{p^{r-1}}\right) (mod\, p^r)$, untuk semua matiks A bilangan bulat, p bilangan prima, $r \in z$. Selanjutnya tahun 2010, Avron, H telah membahas mengenai analisis jaringan kompleks, suatu permasalahan yang penting untuk menghitung jumlah bilangan pada segitiga pada graph terhubung sederhana. Bilangan yang diperoleh adalah $Tr(A^3)/6$, dengan A adalah matriks ketetanggaan pada graph. Menurut Brezinski e*t* al pada tahun 2012, *trace* dari matriks berpangkat sering dibahas pada beberapa bidang matematika, seperti Analisis Jaringan, Teori Bilangan, Sistem Dinamik, Teori Matriks dan Persamaan Diferensial.

Berdasarkan paparan tersebut dan penelitian sebelumnya yang hanya membahas mengenai *trace* dari matriks $2\ x\ 2$ berpangkat bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif, maka penulis tertarik untuk melanjutkan pembahasan mengenai *trace* dari matriks $3\ x\ 3$ berpangkat bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif. Penulis tertarik untuk membuat formula atau rumus umum *trace* matriks $3\ x\ 3$ berpangkat bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif. Dengan adanya rumus tersebut, diharapkan dapat memudahkan kita dalam menentukan *trace* matriks berpangkat bilangan bulat. Sehingga hal ini diharapkan dapat membantu berbagai pihak, baik di bidang matematika maupun diluar matematika seperti ekonomi, biologi, kimia, pertanian dan sebagainya, yang membutuhkan aplikasi *trace* matriks.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini yaitu : "Bagaimana bentuk umum *trace* matriks khusus $3\ x\ 3$ berpangkat bilangan bulat?"

1.3 Batasan masalah

Untuk mencegah meluasnya permasalahan yang ada dan agar lebih terarah, maka dilakukan pembatasan, yaitu:

1. Matriks khusus yang digunakan

$$(A_3) = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

$$(B_3) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

2. Menghitung determinan untuk matriks khusus $3 \ x \ 3$ menggunakan metode ekspansi kofaktor.
3. *Trace* matriks khusus $3 \ x \ 3$ berpangkat bilangan bulat negatif, untuk matriks $3 \ x \ 3$ adalah matriks yang dapat dibalik.

1.4 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah

1. Untuk mendapatkan bentuk umum perpangkatan matriks khusus $3 \ x \ 3$ dan *trace* matriks khusus $3 \ x \ 3$ pada Persamaan (1.1) dan Persamaan (1.2) berpangkat bilangan bulat positif.
2. Untuk mendapatkan bentuk umum perpangkatan matriks khusus $3 \ x \ 3$ dan *trace* matriks khusus $3 \ x \ 3$ pada Persamaan (1.1) dan Persamaan (1.2) berpangkat bilangan bulat negatif.

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Rumus umum yang diperoleh pada penelitian ini diharapkan dapat membantu berbagai pihak, baik di bidang ekonomi, biologi, kimia, pertanian dan sebagainya, yang membutuhkan aplikasi *trace* matriks, terutama dalam menentukan *trace* matriks khusus $3 \ x \ 3$ berpangkat bilangan bulat.
2. Memberikan kontribusi penelitian di bidang matematika terutama bidang aljabar mengenai *trace* matriks khusus $3 \ x \ 3$ berpangkat bilangan bulat.

3. Menghasilkan penelitian baru yang bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Tinjauan pustaka yang akan digunakan berkaitan dengan pembahasan adalah: tentang matriks dan operasi matrik, *trace* matriks, determinan serta beberapa definisi dan teorema yang berhubungan dengan *trace* matriks, invers matriks dan sedikit pengertian induksi matematika.

2.1 Matriks dan Jenis-Jenis Matriks

Pada subbab ini diuraikan pengertian matriks dan operasi matriks. Adapun pengertian dari suatu matriks dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.1 (Anton, 1987) Suatu matriks adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri matriks.

Matriks dengan m baris dan n kolom disebut matriks$m \times n$. Matriks dengan jumlah baris dan jumlah kolom yang sama disebut matriks bujursangkar. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif, dinyatakan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Terdapat beberapa jenis-jenis matriks, diantaranya adalah:

a. Matriks Diagonal.

Suatu matriks bujur sangkar yang semua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol disebut matriks diagonal. Bentuk matriks diagonal :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

b. Matriks Segitiga

Matriks bujur sangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah (*lower triangular*) dan matriks bujursangkar yang semua entri di bawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas (*upper triangular*).

1) Bentuk matriks segitiga atas(*upper triangular*)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

2) Bentuk matriks segitiga bawah (*lower triangular*)

22

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

c. Matriks simetris

Suatu matriks bujursangkar dikatakan simetris jika $A = A^T$ dimana $a_{ij} = a_{ji}$untuk semua nilai dari i dan j . Bentuk matriks simetris untuk ordo 4×4 sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dibahas tentang perkalian matriks yang berguna untuk mendapatkan pemangkatan matriks.

2.2 Perkalian Matriks

Definisi 2.2 (Rosen, 2007) Misalkan A adalah matriks $m \times k$dan B adalah matriks $k \times n$. Perkalian A dan B, dinotasikan dengan AB adalah matriks $m \times n$ dengan entri ke-(i,j) sama dengan jumlah perkalian dari elemen yang bersesuian dari baris ke-i dari A dan kolom ke-j dari B. Dengan kata lain,jika $AB = [c_{ij}]$, maka

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} \tag{2.2}$$

Selanjutnya, diberikan teorema mengenai sifat-sifat perkalian matriks yang lebih umum, sebagai berikut.

Teorema 2.1 (Larson, 2013) Jika A,B dan C adalah matriks dan c adalah skalar, maka sifat berikut ini berlaku.

1. $(AB)\,C = A\,(BC)$. (hukum asosiatif pada perkalian matriks)
2. $A(B + C) = AB + BC$. (hukum distributif kiri)
3. $(A + B)\,C = AC + BC$. (hukum distributif kanan)
4. $c(AB) = (c\,A)\,B = A\,(c\,B)$.

Berikut diberikan definisi dan teorema yang berhubungan dengan perpangkatan matriks.

Definisi 2.3 (Anton, 1987) Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi

$$A^0 = 1, \qquad A^n = \underbrace{AA \ldots A}_{n\ faktor}\ (n > 0).$$

Akan tetapi, jika A dapat dibalik, maka dapat didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n\ faktor}.$$

Teorema berikut merupakan sifat-sifat yang berhubungan dengan Definisi 2.3.

Teorema 2.2 (Anton, 1987) Jika A adalah matriks kuadrat dan r serta s adalah bilangan bulat, maka berlaku:

1. $A^r\,A^s = A^{r+s}$.
2. $(A^r)^s = A^{rs}$.

Untuk mendapat bentuk umum dari *trace* matriks 3×3 yang berpangkat bilangan bulat, diperlukan bentuk dari daterminan matriks. Berikut diberikan definisi dan metode menentukan determinan matriks.

2.3 Determinan

Definisi 2.4 (Anton, 1987) Misalkan A adalah matriks bujur sagkar. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan kita definisikan $\det(A)$ sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A.

$$\det(A) = \sum \pm a_{1_{j1}} a_{2_{j2}} \cdots a_{n_{jn}} \tag{2.3}$$

Teorema berikut menjelaskan sifat-sifat determinan dari suatu matriks bujur sangkar.

Teorema 2.3 (Anton, 1987) Jika A adalah sebarang matriks kuadrat berukuran $n\ x\ n$ dan k adalah sebarang skalar, maka berlaku:

1. $\det(A) = \det(A^t)$
2. $\det(k\ A) = k^n \det(A^t)$
3. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar yaitu : Metode Sarrus, Metode Minor dan Kofaktor, Metode CHIO, Metode Eliminasi Gauss, Metode Dekomposisi Matriks. Berdasarkan 5 metode di atas, penulis hanya menggunakan metode minor dan kofaktor dalam mencari determinan suatu matriks.

Definisi 2.5 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke$-j$ dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Berdasarkan penjelasan dari minor dan kofaktor di atas, maka dapat dibentuk rumus determinan menggunakan ekpansi kofaktor dalam teorema berikut:

Teorema 2.4 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Determinan dari matriks $A, n \times n$, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali – hasil kali yang diperoleh, dimana untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$,

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$
(*ekpansi kofaktor sepanjang kolom ke-j*)

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$
(*ekpansi kofaktor sepanjang baris ke-i*)

Matriks yang akan diteliti adalah matriks berukuran 3×3 yang mempunyai invers, atau matriks dapat dibalik. Berikut diberikan definisi dan teoremayang berhubungan dengan invers matriks.

3.4 Invers Matriks

Definisi 2.6 (Ruminta, 2009) Jika A adalah matriks ukuran $n \times n$ dan jika ada matriks B ukuran $n \times n$ sedemikian sehingga :

$$AB = BA = I$$

dengan I adalah matriks identitas ukuran $n \times n$, maka matriks A disebut non singular atau *invertibel* dan matriks A merupakan invers dari B atau B merupakan invers dari A.

Invers suatu matriks dapat ditentukan dengan beberapa metode yaitu Substitusi, Partisi Matriks, Matriks Adjoin, Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss Jordan, Perkalian Matriks Invers Elementer, dan Dekomposisi Matriks LU. Berdasarkan metode-metode tersebut penulis hanya menggunakan metode adjoin dalam mencari invers suatu matriks.

Definisi 2.7 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika Aadalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor daria_{ij} maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Transpose dari matrik ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj\ (A)$.

Suatu matriks A mempunyai invers atau tidak dapat dilihat dari determinan matriks A tersebut. Apabila $\det(A) \neq 0$ berarti matriks A mempunyai invers. Hal tersebut dijelaskan oleh teorema berikut.

Teorema 2.5 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Suatu matriks kuadrat A dapat dibalik jika dan hanya jika $det(A) \neq 0$.

Teorema 2.6 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Setelah dibahas beberapa materi yang berhubungan dengan trace matriks, maka berikut diberikan definisi dan teorema yang berhubungan dengan trace matriks itu sendiri.

3.5 Trace Matriks

Definisi 2.8 (Gentle, 2007) Misalkan $A = [a_{ij}]$ suatu matriks persegi berukuran $n \times n$, maka *trace* dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal matriks A dan dinotasikan dengan tr(A). Dinyatakan bahwa *trace* matriks A adalah:

$$tr(A) = \sum_i a_{ii} \tag{2.4}$$

Contoh 2.1 : Diberikan matriks 3×3 sebagai berikut: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Hitunglah nilai *trace* dari matriks A ?

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} tr(A) &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ &= 1 + (-3) + 0 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Teorema berikut menjelaskan sifat-sifat *trace* matriks.

Teorema 2.7 (Gentle, 2007) Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar dengan orde yang sama dan c adalah skalar, maka berlaku:

1. $tr(A) = tr(A^t)$
2. $tr(cA) = c.tr(A^t)$
3. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
4. $tr(AB) = tr(BA)$

Bukti.Diberikan matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

maka $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mn}$ (2.5)

dan $$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

maka $tr(B) = b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{mn}$ (2.6)

i. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A) = tr(A^T)$. *Transpose* dari matriks A, yaitu :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$tr(A^T) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \qquad (2.7)$$

Berdasarkan persamaan (2.5) dan (2.7) maka terbukti:

$$tr(A) = tr(A^T).$$

ii. Akan ditunjukkan bahwa $tr(cA) = c\,tr(A)$. untuk c adalah sebarang skalar, diperoleh:

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} tr(cA) &= ca_{11} + ca_{22} + \cdots + ca_{nn} \\ &= c(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ &= c\, tr(A) \end{aligned}$$

Oleh karena itu, telah terbukti $tr(cA) = c\, tr(A)$.

iii. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$. Berdasarkan matriks A dan B, maka

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$tr(A+B) = a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} + \cdots + a_{nn} + b_{nn} \tag{2.8}$$

sehingga

$$\begin{aligned} tr(A+B) &= a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} + \cdots + a_{nn} + b_{nn} \\ &= (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn}) \\ &= tr(A) + tr(B). \end{aligned}$$

Oleh karena itu, telah terbukti bahwa $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

iv. Akan ditunjukkan bahwa $tr(AB) = tr(BA)$. Dari matriks A dan B maka di peroleh:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} tr(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) \\ &+ \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dan selanjutnya untuk

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} & b_{11}a_{12} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n2} & \cdots & b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \cdots + b_{1n}a_{nn} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{2n}a_{n1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} & \cdots & b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \cdots + b_{2n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_{11} + b_{n2}a_{21} + \cdots + b_{nn}a_{n1} & b_{n1}a_{22} + b_{n2}a_{21} + \cdots + b_{nn}a_{n2} & \cdots & b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} tr(BA) &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}) \\ &\quad + \cdots + b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \\ &= b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} + \cdots + b_{n1}a_{1n} + b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} + b_{1n}a_{n1} \\ &\quad + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) \\ &\quad + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}) \\ &= tr(AB) \end{aligned}$$

■

Berikut diberikan contoh menentukan *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif genap dan berpangkat bilangan bulat positif ganjil dengan menggunakan cara biasa.

Contoh 2.2

Tentukan $tr(A^8)$ dari matriks berikut: $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Untuk mendapatkan *trace* matriks tersebut, maka matriks harus dikalikan sebanyak delapan kali yang dijabarkan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^4 x A^2 = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = A^6 x A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh:

$$tr(A^8) = 4 + (-5) = -1$$

Contoh 2.3 : Tentukan $tr(A^5)$ dari matriks berikut: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Untuk mendapatkan *trace* matriks tersebut, maka matriks harus dikalikan sebanyak lima kali yang dijabarkan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = A^3 A^2 = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 153 & 418 \\ 209 & 571 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh:

$$tr(A^5) = 153 + 571 = 724$$

Berdasarkan Contoh 2.2 dan Contoh 2.3 maka peneliti J. Pahade and M. Jha (2015) melakukan penelitian yang bertujuan mendapatkan bentuk umum dari trace matriks berpangkat bilanagn bulat positif. Pemaparannya sebagai berikut.

2.6 *Trace* Matriks 2 *x* 2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pembahasan mengenai *trace* matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat positif telah di bahas oleh J. Pahade and M. Jha pada tahun 2015. Makalah tersebut mendapatkan rumus umum *trace* matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Rumus umum yang diperoleh ada 2 bentuk, yang pertama untuk pangkat bilangan bulat positif genap dan yang kedua pangkat bilanagn positif ganjil. Berikut diberikan teoremanya beserta contoh pada masing-masing teorema.

Teorema 2.8 (Pahade, 2015) Untuk sebarang$n$ bilangan bulat positif genap dari matriks A berukuran 2×2, maka:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}$$

Contoh 2.4 : Tentukan $tr(A^8)$ dari matriks berikut: $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$tr(A) = 5 + (-4) = 1$$

dan

$$\det(A) = -20 - (-21) = 1$$

Sehingga menurut Teorema 2.5 diperoleh:

$$\begin{aligned} tr(A^8) &= (tr(A))^8 - 8(\det(A))(tr(A))^6 + 20(\det(A))^2 (tr(A))^4 - 16(\det(A))^3 (tr(A))^2 \\ &\quad + 2(\det(A))^4 \\ &= (1)^8 - 8(1)(1)^6 + 20(1)^2(1)^4 - 16(1)^3(1)^2 + 2(1)^4 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Teorema 2.9 (Pahade, 2015) Untuk sebarang n bilangan bulat positif ganjil dari matriks A berukuran 2×2, maka:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}$$

Contoh 2.5 : Tentukan $tr(A^5)$ dari matriks berikut: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$tr(A) = 1 + 3 = 4$$

dan

$$\det(A) = 3 - 1 = 1$$

Sehingga menurut Teorema 2.6 diperoleh:

$$\begin{aligned} tr(A^5) &= (tr(A))^5 - 5(\det(A))(tr(A))^3 + 5(\det(A))^2(tr(A)) \\ &= (4)^5 - 5(1)(4)^3 + 5(1)^2(4) \\ &= 724 \end{aligned}$$

Salah satu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan rumus yang diperoleh dari pola rekursif tersebut adalah induksi matematika. Berikut diberikan definisi dari induksi matematika.

Definisi 2.9 (Sukirman, 2006) Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan maupun dalam matematika lainnya. Induksi matematika merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli.

Misalkan $\mathrm{p}(n)$ adalah suatu proporsi/pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika adalah sebagai berikut :

1. Langkah (1) : Ditunjukkan bahwa $\mathrm{p}(1)$ benar.
2. Langkah (2) : Diasumsikan bahwa $\mathrm{p}(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{p}(k+1)$ juga benar.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian merupakan langkah-langkah yang digunakan penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat. Metodologi penelitian pada penelitian ini adalah studi literatur. Adapun langkah-langkah yang digunakan sebagai berikut:

1. Diberikan matriks khusus 3×3,

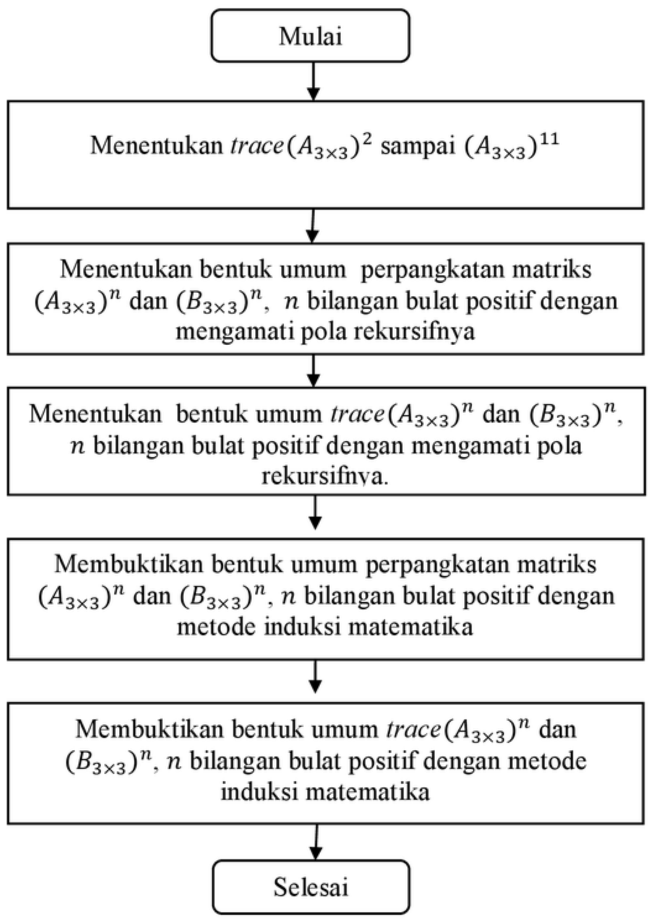
$$(A_3) = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$(B_3) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$$

2. Menentukan perpangkatan matriks $(A_{3\times3})^2$ sampai $(A_{3\times3})^{11}$.
3. Menentukan determinan matriks, jika determinannya tidak sama dengan nol, maka akan ditentukan perpangkatan bilangan bulat negatif.
4. Menentukan bentuk umum perpangkatan matriks $(A_{3\times3})^n$ dan $(B_{3\times3})^n$, dengan n bilangan bulat positif.
5. Menganalisa bentuk umum perpangkatan matriks $(A_{3\times3})^{-n}$ dan $(B_{3\times3})^{-n}$, dengan n bilangan bulat negatif.
6. Membuktikan bentuk umum dari *trace*$(A_{3\times3})^n$ dan $(B_{3\times3})^n$,dengan n bilangan bulat positif dengan metode induksi matematika.
7. Mengaplikasikan bentuk umum untuk *trace*$(A_{3\times3})^n$ dan $(B_{3\times3})^n$, dengan n bilangan bulat positif pada contoh.

Langkah-langkah pada metodologi penelitian diatas dapat digambarkan secara detail dalam *Flow chart* berikut:

3.1 Langkah – langkah Untuk Menentukan *Trace* Matriks Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif.



3.2 Langkah – langkah Untuk Menentukan *Trace* Matriks Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif.

Mulai

Menentukan nilai determinan dari matriks $(A_{3\times3})^n$ dan $(B_{3\times3})^n$,

Jika nilai determinan dari kedua matriks tersebut nol, maka matriks tidak dapat dibalik/tidak punya invers

Perpangkatan matriks $(A_{3\times3})^n$ dan $(B_{3\times3})^n$,tidak dapat dilakukan.

Trace matriks khusus $(A_{3\times3})^n$ dan $(B_{3\times3})^n$ berpangkat bilangan bulat negatif tidak ada.

Menganalisa hasil perpangkatan matriks dan *trace* matriks $(A_{3\times3})^n$ dan $(B_{3\times3})^n$

Selesai

BAB IV
TRACE MATRIKS KHUSUS PERTAMA BERPANGKAT BILANGAN BULAT

Pada bab ini akan dibahas mengenai cara menentukan *trace* matriks khusus 3×3 pada Persamaan (1.1) berpangkat bilangan bulat positif. Sebelum mendapatkan *trace* matriks berbentuk khusus 3×3 , maka terlebih dahulu ditentukan matriks berpangkat dari matriks khusus tersebut. Berikut diberikan penjelasannya.

4.1 Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Trace matriks berpangkat diperoleh dari hasil penjumlahan diagonal utama dari matrisk berpangkat tersebut. Artinya harus diperoleh terlebih dahulu bentuk matriks berpangkatnya, selanjutnya diperoleh niali *trace*nya. Berikut diberikan langkah-langkah yang sesuai metodologi penelitian untuk menentukan bentuk umum matriks berpangkat bilangan bulat positif.

1. Diberikan matriks khusus sesuai pada Persamaan (1.1) sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \quad .$$

   Berdasarkan Definisi 2.8 maka diperoleh:

$$tr(A_3) = a + b + c \tag{4.1}$$

2. Menentukan matriks berpangkat $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{11}$.

$$\begin{aligned}(A_3)^2 &= A.A \\ &= \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + ab + ac & a^2 + ab + ac & a^2 + ab + ac \\ ab + b^2 + bc & ab + b^2 + bc & ab + b^2 + bc \\ ac + bc + c^2 & ac + bc + c^2 & ac + bc + c^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a(a+b+c) & a(a+b+c) & a(a+b+c) \\ b(a+b+c) & b(a+b+c) & b(a+b+c) \\ c(a+b+c) & c(a+b+c) & c(a+b+c) \end{bmatrix} \\
&= (a+b+c)\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

$$(A_3)^3 = (A_3)^2 . A$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+ab+ac & a^2+ab+ac & a^2+ab+ac \\ ab+b^2+bc & ab+b^2+bc & ab+b^2+bc \\ ac+bc+c^2 & ac+bc+c^2 & ac+bc+c^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)(a^2+ab+ac) & (a+b+c)(a^2+ab+ac) & (a+b+c)(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)(ab+b^2+bc) & (a+b+c)(ab+b^2+bc) & (a+b+c)(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)(ac+bc+c^2) & (a+b+c)(ac+bc+c^2) & (a+b+c)(ac+bc+c^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(a+b+c)^2 & a(a+b+c)^2 & a(a+b+c)^2 \\ b(a+b+c)^2 & b(a+b+c)^2 & b(a+b+c)^2 \\ c(a+b+c)^2 & c(a+b+c)^2 & c(a+b+c)^2 \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$(A_3)^4 = (A_3)^3 . A$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)(a^2+ab+ac) & (a+b+c)(a^2+ab+ac) & (a+b+c)(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)(ab+b^2+bc) & (a+b+c)(ab+b^2+bc) & (a+b+c)(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)(ac+bc+c^2) & (a+b+c)(ac+bc+c^2) & (a+b+c)(ac+bc+c^2) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^2(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^2(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^2(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^2(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^2(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^2(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^2(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^2(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^2(ac+bc+c^2) \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

$$= \begin{bmatrix} a(a+b+c)^3 & a(a+b+c)^3 & a(a+b+c)^3 \\ b(a+b+c)^3 & b(a+b+c)^3 & b(a+b+c)^3 \\ c(a+b+c)^3 & c(a+b+c)^3 & c(a+b+c)^3 \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^3 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^5 = (A_3)^4 . A$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^2(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^2(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^2(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^2(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^2(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^2(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^2(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^2(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^2(ac+bc+c^2) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^3(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^3(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^3(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^3(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^3(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^3(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^3(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^3(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^3(ac+bc+c^2) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

$$= \begin{bmatrix} a(a+b+c)^4 & a(a+b+c)^4 & a(a+b+c)^4 \\ b(a+b+c)^4 & b(a+b+c)^4 & b(a+b+c)^4 \\ c(a+b+c)^4 & c(a+b+c)^4 & c(a+b+c)^4 \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^4 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^6 = (A_3)^5 . A$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^3(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^3(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^3(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^3(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^3(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^3(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^3(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^3(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^3(ac+bc+c^2) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^4(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^4(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^4(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^4(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^4(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^4(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^4(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^4(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^4(ac+bc+c^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(a+b+c)^5 & a(a+b+c)^5 & a(a+b+c)^5 \\ b(a+b+c)^5 & b(a+b+c)^5 & b(a+b+c)^5 \\ c(a+b+c)^5 & c(a+b+c)^5 & c(a+b+c)^5 \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^5 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$(A_3)^7 = (A_3)^6 . A$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^4(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^4(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^4(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^4(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^4(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^4(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^4(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^4(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^4(ac+bc+c^2) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^5(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^5(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^5(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^5(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^5(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^5(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^5(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^5(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^5(ac+bc+c^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(a+b+c)^6 & a(a+b+c)^6 & a(a+b+c)^6 \\ b(a+b+c)^6 & b(a+b+c)^6 & b(a+b+c)^6 \\ c(a+b+c)^6 & c(a+b+c)^6 & c(a+b+c)^6 \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^6 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$$(A_3)^8 = (A_3)^7 . A$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^5(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^5(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^5(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^5(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^5(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^5(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^5(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^5(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^5(ac+bc+c^2) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^6(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^6(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^6(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^6(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^6(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^6(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^6(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^6(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^6(ac+bc+c^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(a+b+c)^7 & a(a+b+c)^7 & a(a+b+c)^7 \\ b(a+b+c)^7 & b(a+b+c)^7 & b(a+b+c)^7 \\ c(a+b+c)^7 & c(a+b+c)^7 & c(a+b+c)^7 \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^7 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$$(A_3)^9 = (A_3)^8 . A$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^6(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^6(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^6(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^6(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^6(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^6(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^6(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^6(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^6(ac+bc+c^2) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^7(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^7(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^7(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^7(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^7(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^7(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^7(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^7(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^7(ac+bc+c^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(a+b+c)^8 & a(a+b+c)^8 & a(a+b+c)^8 \\ b(a+b+c)^8 & b(a+b+c)^8 & b(a+b+c)^8 \\ c(a+b+c)^8 & c(a+b+c)^8 & c(a+b+c)^8 \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^8 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

$$(A_3)^{10} = (A_3)^9 . A$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^7(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^7(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^7(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^7(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^7(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^7(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^7(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^7(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^7(ac+bc+c^2) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^8(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^8(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^8(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^8(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^8(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^8(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^8(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^8(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^8(ac+bc+c^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(a+b+c)^9 & a(a+b+c)^9 & a(a+b+c)^9 \\ b(a+b+c)^9 & b(a+b+c)^9 & b(a+b+c)^9 \\ c(a+b+c)^9 & c(a+b+c)^9 & c(a+b+c)^9 \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^9 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$(A_3)^{11} = (A_3)^{10}.A$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^8(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^8(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^8(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^8(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^8(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^8(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^8(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^8(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^8(ac+bc+c^2) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b+c)^9(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^9(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^9(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^9(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^9(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^9(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^9(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^9(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^9(ac+bc+c^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(a+b+c)^{10} & a(a+b+c)^{10} & a(a+b+c)^{10} \\ b(a+b+c)^{10} & b(a+b+c)^{10} & b(a+b+c)^{10} \\ c(a+b+c)^{10} & c(a+b+c)^{10} & c(a+b+c)^{10} \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^{10} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

3. Menduga bentuk umum matriks berpangkat $(A_3)^n$.

Dengan melihat kembali Persamaan (4.2) sampai (4.11) maka dapat diduga bentuk umum $(A_3)^n$ yaitu:

$$(A_3)^n = \begin{bmatrix} (a+b+c)^{n-2}(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^{n-2}(a^2+ab+ac) & (a+b+c)^{n-2}(a^2+ab+ac) \\ (a+b+c)^{n-2}(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^{n-2}(ab+b^2+bc) & (a+b+c)^{n-2}(ab+b^2+bc) \\ (a+b+c)^{n-2}(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^{n-2}(ac+bc+c^2) & (a+b+c)^{n-2}(ac+bc+c^2) \end{bmatrix}$$

Atau

$$(A_3)^n = (a+b+c)^{n-2}\begin{bmatrix} (a^2+ab+ac) & (a^2+ab+ac) & (a^2+ab+ac) \\ (ab+b^2+bc) & (ab+b^2+bc) & (ab+b^2+bc) \\ (ac+bc+c^2) & (ac+bc+c^2) & (ac+bc+c^2) \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^n = (a+b+c)^{n-2}(a+b+c)\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^n = (a+b+c)^{n-1}\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \qquad (4.12)$$

4. Membuktikan bentuk umum matriks berpangkat $(A_3)^n$ dengan menggunakan induksi matematika.

Bentuk umum $(A_3)^n$ pada Persamaan (4.12) dinyatakan dalam Teorema 4.1 sebagai berikut:

Teorema 4.1: Diberikan matriks dengan bentuk $A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \forall\, a, b, c \in R$, maka

$$(A_3)^n = (a+b+c)^{n-1}\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \forall\, a,b,c \in R$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

Misal, $p(n)$: $(A_3)^n = (a+b+c)^{n-1}\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \forall\, a,b,c \in R$.

1) Akan ditunjukkan $p(1)$ benar.

$$p(1): (A_3)^1 = (a+b+c)^{1-1}\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$= A_3$, dengan memperhatikan Persamaan (1.1), maka $p(1)$ benar.

2) Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): (A_3)^k = (a+b+c)^{k-1}\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, \forall\, a,b,c \in R.$$

Maka akan dibuktikan $p(k+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+1): (A_3)^{k+1} = (a+b+c)^k\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Pembuktiannya sebagai berikut:

$$(A_3)^{k+1} = ((A_3)^k . (A_3)^1)$$

$$= \left((a+b+c)^{k-1} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \right)$$

$$= (a+b+c)^{k-1} \begin{bmatrix} (a^2+ab+ac) & (a^2+ab+ac) & (a^2+ab+ac) \\ (ab+b^2+bc) & (ab+b^2+bc) & (ab+b^2+bc) \\ (ac+bc+c^2) & (ac+bc+c^2) & (ac+bc+c^2) \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^{k-1}(a+b+c) \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^{k} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (4.13) maka $p(k+1)$ benar.

Oleh karena Langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa:

$$(A_3)^n = (a+b+c)^{k-1} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \in R$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 4.1 terbukti. ■

4.2 *Trace* Matriks Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Positif

Setelah diperoleh matriks perpangkatannya maka selanjutnya akan ditentukan *trace* matriks khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dari $tr(A)$ sampai $tr(A^{11})$ yaitu:

Berdasarkan Persamaan (4.1) maka:

$$tr(A) = (a + b + c)$$

Berdasarkan Persamaan (4.2) maka:

$$\begin{aligned} tr(A^2) &= (a^2 + ab + ac) + (ab + b^2 + bc) + (ac + bc + c^2) \\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 \\ &= (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.3) maka:

$$\begin{aligned} tr(A^3) &= (a + b + c)(a^2 + ab + ac) + (a + b + c)(ab + b^2 + bc) \\ &\quad + (a + b + c)(ac + bc + c^2) \\ &= (a + b + c)(a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2) \\ &= (a + b + c)(a + b + c)^2 \\ &= (a + b + c)^3 \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.4) maka:

$$\begin{aligned} tr(A^4) &= (a + b + c)^2(a^2 + ab + ac) + (a + b + c)^2(ab + b^2 + bc) \\ &\quad + (a + b + c)^2(ac + bc + c^2) \\ &= (a + b + c)^2(a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2) \\ &= (a + b + c)^2(a + b + c)^2 \\ &= (a + b + c)^4 \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.5) maka:

$$tr(A^5) = (a+b+c)^3(a^2+ab+ac) + (a+b+c)^3(ab+b^2+bc)$$

$$+ (a+b+c)^3(ac+bc+c^2)$$

$$= (a+b+c)^3(a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2)$$

$$= (a+b+c)^3(a+b+c)^2$$

$$= (a+b+c)^5$$

Berdasarkan Persamaan (4.6) maka:

$$tr(A^6) = (a+b+c)^4(a^2+ab+ac) + (a+b+c)^4(ab+b^2+bc)$$

$$+ (a+b+c)^4(ac+bc+c^2)$$

$$= (a+b+c)^4(a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2)$$

$$= (a+b+c)^4(a+b+c)^2$$

$$= (a+b+c)^6$$

Berdasarkan Persamaan (4.7) maka:

$$tr(A^7) = (a+b+c)^5(a^2+ab+ac) + (a+b+c)^5(ab+b^2+bc)$$

$$+ (a+b+c)^5(ac+bc+c^2)$$

$$= (a+b+c)^5(a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2)$$

$$= (a+b+c)^5(a+b+c)^2$$

$$= (a+b+c)^7$$

Berdasarkan Persamaan (4.8) maka:

$$tr(A^8) = (a+b+c)^6(a^2+ab+ac) + (a+b+c)^6(ab+b^2+bc)$$

$$+ (a+b+c)^6(ac+bc+c^2)$$

$$= (a+b+c)^6(a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2)$$

$$= (a+b+c)^6(a+b+c)^2$$

$$= (a+b+c)^8$$

Berdasarkan Persamaan (4.9) maka:

$$tr(A^9) = (a+b+c)^7(a^2+ab+ac) + (a+b+c)^7(ab+b^2+bc)$$
$$+ (a+b+c)^7(ac+bc+c^2)$$
$$= (a+b+c)^7\big((a^2+ab+ac)+(ab+b^2+bc)+(ac+bc+c^2)\big)$$
$$= (a+b+c)^7(a+b+c)^2$$
$$= (a+b+c)^9$$

Berdasarkan Persamaan (4.10) maka:

$$tr(A^{10}) = (a+b+c)^8(a^2+ab+ac) + (a+b+c)^6(ab+b^2+bc)$$
$$+ (a+b+c)^6(ac+bc+c^2)$$
$$= (a+b+c)^8(a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2)$$
$$= (a+b+c)^8(a+b+c)^2$$
$$= (a+b+c)^{10}$$

Berdasarkan Persamaan (4.11) maka:

$$tr(A^{11}) = (a+b+c)^9(a^2+ab+ac) + (a+b+c)^6(ab+b^2+bc)$$
$$+ (a+b+c)^6(ac+bc+c^2)$$
$$= (a+b+c)^9(a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2)$$
$$= (a+b+c)^9(a+b+c)^2$$
$$= (a+b+c)^{11}$$

Setelah mendapatkan nilai *trace* matriks khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dari $tr(A)$ sampai $tr(A^{11})$, maka dapat diduga bentuk umum *trace* matriks khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Dengan memperhatikan pola $tr(A)$ sampai $tr(A^{11})$ maka dapat diduga bentuk umumnya yaitu:

$tr(A^n) = (a+b+c)^n$. Selanjutnya membuktikan bentuk umum $tr(A_3)^n$ yang dinyatakan dalam Teorema 4.2 berikut ini:

Teorema 4.2: Diberikan matriks khusus dengan bentuk $A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$, $\forall\, a, b, c \in R$, maka: $tr(A_3)^n = (a+b+c)^n$

Bukti:

Pembuktian menggunakan pembuktian langsumg.

Berdasarkan Teorema 4.1 maka bentuk umum $tr(A_3)^n$ yaitu:

$$tr(A_3)^n = tr\left((a+b+c)^{k-1}\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}\right)$$

Dengan menggunakan Definisi 2.8 maka,

$$\begin{aligned} tr(A_3)^n &= (a+b+c)^{k-1}(a+b+c), \\ &= (a+b+c)^k \end{aligned}$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 4.2 terbukti. ∎

4.3 Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Negatif

Menentukan matriks berpangkat bilangan bulat negatif berbeda sedikit dari pada menentukan matriks berpangkat bilangan bulat positif. Perbedaannya yaitu untuk matriks berpangkat bilangan bulat negatif ditentukan terlebih dahulu invers matriks. Namun untuk matriks berpangkat bilangan bulat positif tidak perlu dilakukan. Pada bagian ini akan ditentukan invers matriks khusus 3×3 pada Persamaan (1.1). Menentukan invers matriks menggunakan metode adjoin. Langkah pertama yang dilakukan menentukan invers matriks adalah menentukan nilai determinan matriks tersebut. Jika nilai determinannya tidak sama dengan nol, maka invers matriksnya ada. Namun, jika nilai determinannya sama dengan nol, maka invers matriks tidak ada, sesuai dengan Teorema 2.5.

Diberikan $A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$, dengan mengekspansi sepanjang baris pertama maka diperoleh: $|A_3| = a\begin{vmatrix} b & b \\ c & c \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} b & b \\ c & c \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} b & b \\ c & c \end{vmatrix} = 0$. Artinya nilai determinan matriks khusus 3×3 pada Persamaan (1.1) sama dengan nol. Sehingga invers matrisknya tidak ada. Mengakibatkan *trace* matriks khusus 3×3 pada Persamaan (1.1) berpangkat bilangan negatif tidak ada atau tidak dapat ditentukan. Sesuai Definisi 2.3, perpangkatan matriks untuk bilangan bulat negatif hanya dapat ditentukan jika matrisk tersebut mempunyai invers.

4.4 Aplikasi *Trace* Matriks Khusus Ukuran 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Berikut diberikan beberapa contoh yang berhubungan dengan Teorema 4.1 dan Teorema 4.2 sebagai berikut:

Contoh 4.1 Diberikan matriks $(A_3) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. Hitunglah $tr(A_3)^{11}$ dan $tr(A_3)^{15}$ dengan menggunakan Teorema 4.2.

Penyelesaian:

a. Menurut Teorema 4.2 yaitu: $tr(A_3)^n = (a+b+c)^n$, maka:

$$tr(A_3)^{11} = (2 + (-3) + 1/2)^{11}$$
$$= (-1/2)^{11} = \frac{-1}{2^{11}} = \frac{-1}{2048}$$

b. Akan dicari $tr(A_3)^{14}$

Menurut Teorema 4.2 yaitu: $tr(A_3)^n = (a+b+c)^n$, maka:

$$tr(A_3)^{14} = (2 + (-3) + 1/2)^{14}$$
$$= (-1/2)^{14} = \frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16384}$$

Contoh 4.2 Diberikan matriks $(A_3) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3/4 & 3/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. Hitunglah $tr(A_3)^6$ dan $tr(A_3)^7$ dengan menggunakan Teorema 4.2.

Penyelesaian:

a. Akan dicari $tr(A_3)^6$.

Menurut Teorema 4.2 yaitu: $tr(A_3)^n = (a+b+c)^n$, maka:

$$tr(A_3)^6 = (1/3 + 3/4 + 1/2)^6$$

$$= (19/12)^6 = \frac{19^6}{12^6} = \frac{47045881}{2985984}$$

b. Akan dicari $tr(A_3)^6$.

Menurut Teorema 4.2 yaitu: $tr(A_3)^n = (a+b+c)^n$, maka:

$$tr(A_3)^6 = (1/3 + 3/4 + 1/2)^7$$

$$= (19/12)^7 = \frac{19^7}{12^7} = \frac{564550572}{35831808}$$

Contoh 4.3 Diberikan matriks $(A_3) = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$. Hitunglah $(A_3)^{27}$beserta *trace*-nya dengan menggunakan Teorema 4.1 dan Teorema 4.2.

Penyelesaian:

a. Akan dihitung nilai dari $(A_3)^{27}$ dengan menggunakan Teorema 4.1.

Berdasarkan Teorema 4.1,

$$(A_3)^n = (a+b+c)^{k-1} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

Maka hasil dari $(A_3)^{27}$ adalah sebagai berikut:

$$(A_3)^{27} = ((-4) + (-2) + (-3))^{27-1} \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= (-9)^{26} \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= (-9)^{26} \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

b. Akan dicari $tr(A_3)^{27}$ menggunakan Teorema 4.2 sebagai berikut:

Menurut Teorema 4.2 yaitu: $tr(A_3)^n = (a + b + c)^n$, maka:

$$tr(A_3)^{27} = (-4 + (-2) + (-3))^{27}$$
$$= (-9)^{27}$$

Contoh 4.4 Diberikan matriks $(A_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix}$. Hitunglah $(A_3)^{14}$ beserta *trace*-nya dengan menggunakan Teorema 4.1 dan Teorema 4.2.

Penyelesaian:

a. Akan dihitung nilai dari $(A_3)^{14}$ dengan menggunakan Teorema 4.1.

Berdasarkan Teorema 4.1:

$$(A_3)^n = (a + b + c)^{k-1} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}.$$

Maka hasil dari $(A_3)^{14}$ adalah sebagai berikut:

$$(A_3)^{14} = (0 + 7 + 1/7)^{14-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$
$$= \left(7\frac{1}{7}\right)^{13} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$
$$= \left(\frac{50}{49}\right)^{13} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

b. Akan dicari $tr(A_3)^{13}$ menggunakan Teorema 4.2 sebagai berikut:

Menurut Teorema 4.2 yaitu: $tr(A_3)^n = (a + b + c)^n$, maka:

$$tr(A_3)^{13} = (0 + 7 + 1/7)^{13}$$
$$= \left(\frac{50}{49}\right)^{13}$$

BAB V
TRACE MATRIKS KHUSUS KEDUA BERPANGKAT BILANGAN BULAT

Pada bab ini akan dibahas mengenai cara menentukan *trace* matriks khusus 3×3 pada Persamaan (1.2) berpangkat bilangan bulat positif. Sebelum mendapatkan *trace* matriks khusus 3×3 , maka terlebih dahulu ditentukan matriks berpangkat dari matriks khusus tersebut. Berikut diberikan penjelasannya.

5.1 Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Trace matriks berpangkat diperoleh dari hasil penjumlahan diagonal utama dari matrisk berpangkat tersebut. Artinya harus diperoleh terlebih dahulu bentuk matriks berpangkatnya, selanjutnya diperoleh niali *trace*nya. Berikut diberikan langkah-langkah yang sesuai metodologi penelitian untuk menentukan bentuk umum matriks berpangkat bilangan bulat positif.

1. Diberikan matriks khusus sesuai pada Persamaan (1.2) sebagai berikut:

$$(B_3) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$$

.

Berdasarkan Definisi 2.8 maka diperoleh:

$$tr(B_3) = a + b + c \tag{5.1}$$

2. Menentukan matriks berpangkat$(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{11}$.

$$\begin{aligned} (B_3)^2 &= A.A \\ &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + ab + ac & ab + b^2 + bc & ac + bc + c^2 \\ a^2 + ab + ac & ab + b^2 + bc & ac + bc + c^2 \\ a^2 + ab + ac & ab + b^2 + bc & ac + bc + c^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} a(a+b+c) & b(a+b+c) & c(a+b+c) \\ a(a+b+c) & b(a+b+c) & c(a+b+c) \\ a(a+b+c) & b(a+b+c) & c(a+b+c) \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

$$(B_3)^3 = (B_3)^2 . (B_3)$$

$$= (a+b+c)\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)\,(a+b+c)\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

$$(B_3)^4 = (B_3)^3 . (B_3)$$

$$= (a+b+c)^2\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2(a+b+c)\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^3\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

$$(B_3)^5 = (B_3)^4 . (B_3)$$

$$= (a+b+c)^3\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^3\,(a+b+c)\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^4\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

$$(B_3)^6 = (B_3)^5.(B_3)$$

$$= (a+b+c)^4 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^4 \, (a+b+c) \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^5 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

$$(B_3)^7 = (B_3)^6.B$$

$$= (a+b+c)^5 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^5 (a+b+c) \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^6 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

$$(B_3)^8 = (B_3)^7.B$$

$$= (a+b+c)^6 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^6 (a+b+c) \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^7 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

$$(B_3)^9 = (B_3)^8.B$$

$$= (a+b+c)^7 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^7 \, (a+b+c) \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^8 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$(B_3)^{10} = (B_3)^9 . B$$

$$= (a+b+c)^8 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^8 \, (a+b+c) \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^9 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$(B_3)^{11} = (B_3)^{10} . B$$

$$= (a+b+c)^9 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^9 \, (a+b+c) \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^{10} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

3. Menduga bentuk umum matriks berpangkat $(B_3)^n$.

Dengan melihat kembali Persamaan (5.2) sampai (5.11) maka dapat diduga bentuk umum $(B_3)^n$, yaitu:

$$(B_3)^n = (a+b+c)^{n-1} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

4. Membuktikan bentuk umum matriks berpangkat $(B_3)^n$ dengan menggunakan induksi matematika.

Bentuk umum $(B_3)^n$ pada Persamaan (5.12) dinyatakan dalam Teorema 5.1 sebagai berikut:

Teorema 5.1: Diberikan matriks dengan bentuk $(B_3) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \forall\, a, b, c \in R$,

maka

$$(B_3)^n = (a+b+c)^{n-1} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \forall\, a, b, c \in R$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

Misal, $p(n)$: $(B_3)^n = (a+b+c)^{n-1} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \in R$.

1) Akan ditunjukkan $p(1)$ benar.

$$p(1): (B_3)^1 = (a+b+c)^{1-1} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$= A_3$, dengan memperhatikan Persamaan (1.2), maka $p(1)$ benar.

2) Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): (B_3)^k = (a+b+c)^{k-1} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \in R.$$

Maka akan dibuktikan $p(k+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+1): (B_3)^{k+1} = (a+b+c)^k \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \qquad (5.13)$$

Pembuktiannya sebagai berikut:

$$(B_3)^{k+1} = ((B_3)^k . (B_3)^1)$$

$$= \left((a+b+c)^{k-1} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \right)$$

$$= (a+b+c)^{k-1} \begin{bmatrix} a^2+ab+ac & ab+b^2+bc & ac+bc+c^2 \\ a^2+ab+ac & ab+b^2+bc & ac+bc+c^2 \\ a^2+ab+ac & ab+b^2+bc & ac+bc+c^2 \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^{k-1}\begin{bmatrix} a(a+b+c) & b(a+b+c) & c(a+b+c) \\ a(a+b+c) & b(a+b+c) & c(a+b+c) \\ a(a+b+c) & b(a+b+c) & c(a+b+c) \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^{k-1}(a+b+c)\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$=(a+b+c)^{k}\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (5.13) maka $p(k+1)$ benar.

Oleh karena Langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa:

$$(B_3)^n = (a+b+c)^{n-1}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}, \forall\ a,b,c\ \in R$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 4.1 terbukti. ■

4.2 ***Trace* Matriks Khusus Bentuk Kedua 3×3 Berpangkat Bilangan Positif**

Setelah diperoleh matriks perpangkatannya maka selanjutnya akan ditentukan *trace* matriks khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dari $tr(A)$ sampai $tr(A^{11})$ yaitu:

Berdasarkan Persamaan (5.1) maka:

$$tr(B) = (a + b + c)$$

Berdasarkan Persamaan (5.2) maka:

$$tr(B^2) = tr\left((a + b + c)\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a + b + c)\ (a + b + c)$$

$$= (a + b + c)^2$$

Berdasarkan Persamaan (5.3) maka:

$$tr(B^3) = tr\left((a + b + c)^2\ \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a + b + c)(a + b + c)^2$$

$$= (a + b + c)^3$$

Berdasarkan Persamaan (5.4) maka:

$$tr(B^4) = tr\left((a + b + c)^3\ \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a + b + c)^3(a + b + c)$$

$$= (a + b + c)^4$$

Berdasarkan Persamaan (5.5) maka:

$$tr(B^5) = tr\left((a+b+c)^4 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a+b+c)^4(a+b+c)^1$$

$$= (a+b+c)^5$$

Berdasarkan Persamaan (5.6) maka:

$$tr(B^6) = tr\left((a+b+c)^5 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a+b+c)^5(a+b+c)^1$$

$$= (a+b+c)^6$$

Berdasarkan Persamaan (5.7) maka:

$$tr(B^7) = tr\left((a+b+c)^6 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a+b+c)^5(a+b+c)^2$$

$$= (a+b+c)^7$$

Berdasarkan Persamaan (5.8) maka:

$$tr(B^8) = tr\left((a+b+c)^7 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a+b+c)^7(a+b+c)^1$$

$$= (a+b+c)^8$$

Berdasarkan Persamaan (5.9) maka:

$$tr(B^9) = tr\left((a+b+c)^8 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a+b+c)^8(a+b+c)^1$$

$$= (a+b+c)^9$$

Berdasarkan Persamaan (5.10) maka:

$$tr(B^{10}) = tr\left((a+b+c)^9 \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a+b+c)^9(a+b+c)^1$$

$$= (a+b+c)^{10}$$

Berdasarkan Persamaan (5.11) maka:

$$tr(B^{11}) = tr\left((a+b+c)^{10} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a+b+c)^{10}(a+b+c)^1$$

$$= (a+b+c)^{11}$$

Setelah mendapatkan nilai *trace* matriks khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dari $tr(B)$ sampai $tr(B^{11})$, maka dapat diduga bentuk umum *trace* matriks khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Dengan memperhatikan pola $tr(B)$ sampai $tr(B^{11})$ maka dapat diduga bentuk umumnya yaitu: $= tr(B^n) = (a+b+c)^n$. Selanjutnya membuktikan bentuk umum $tr(B_3)^n$ yang dinyatakan dalam Teorema 5.2 berikut ini:

Teorema 5.2: Diberikan matriks khusus dengan bentuk $B_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$, $\forall\, a, b, c \in R$, maka: $tr(B_3)^n = (a+b+c)^n$

Bukti:

Pembuktian menggunakan pembuktian langsumg.

Berdasarkan Teorema 5.1 maka bentuk umum $tr(B_3)^n$ yaitu:

$$tr(B_3)^n = tr\left((a+b+c)^{k-1} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}\right)$$

Dengan menggunakan Definisi 2.8 maka,

$$tr(B_3)^n = (a+b+c)^{k-1}(a+b+c),$$
$$= (a+b+c)^k$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 5.2 terbukti. ■

4.3 Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Negatif

Menentukan matriks berpangkat bilangan bulat negatif berbeda sedikit dari pada menentukan matriks berpangkat bilangan bulat positif. Perbedaannya yaitu untuk matriks berpangkat bilangan bulat negatif ditentukan terlebih dahulu menentukan invers matriks. Namun untuk matriks berpangkat bilanagn bulat positif tidak perlu dilakukan. Pada bagian ini akan ditentukan invers matriks khusus 3×3 pada Persamaan (1.2). Menentukan invers matriks menggunakan metode adjoin. Langkah pertama yang dilakukan menentukan invers matriks adalah menentukan nilai determinan matriks tersebut. Jika nilai determinannya tidak sama dengan nol, maka invers matriksnya ada. Namun, jika nilai detrminananya sama dengan nol, maka invers matriks tidak ada, sesuai dengan Teorema 2.5.

Diberikan $B_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$, dengan mengekspansi sepanjang baris pertama maka diperoleh: $|B_3| = a\begin{vmatrix} b & b \\ c & c \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & b \\ a & c \end{vmatrix} = 0.$ Artinya nilai determinan matriks khusus 3×3 pada Persamaan (1.2) sama dengan nol. Sehingga invers matrisknya tidak ada. Mengakibatkan trace matriks khusus 3×3 pada Persamaan (1.2) berpangkat bilanag megatif tidak ada atau tidak dapat ditentukan. Sesuai Definisi 2.3, perpangkatan matriks untuk bilangan bulat negatif hanya dapat ditentukan jika matrisk tersebut mempunyai invers.

4.4 Aplikasi *Trace* Matriks Khusus Kedua 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Berikut diberikan beberapa contoh yang berhubungan dengan Teorema 5.1 dan Teorema 5.2 sebagai berikut:

Contoh 4.1 Diberikan matriks $(B_3) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1/2 \\ 2 & -3 & 1/2 \\ 2 & -3 & 1/2 \end{bmatrix}$. Hitunglah $tr(B_3)^{11}$ dan $tr(B_3)^{15}$ dengan menggunakan Teorema 5.2.

Penyelesaian:

a. Menurut Teorema 5.2 yaitu: $tr(B_3)^n = (a+b+c)^n$, maka:

$$tr(B_3)^{11} = (2 + (-3) + 1/2)^{11}$$
$$= (-1/2)^{11} = \frac{-1}{2^{11}} = \frac{-1}{2048}$$

b. Akan dicari $tr(B_3)^{14}$

Menurut Teorema 5.2 yaitu: $tr(B_3)^n = (a+b+c)^n$, maka:

$$tr(B_3)^{14} = (2 + (-3) + 1/2)^{14}$$
$$= (-1/2)^{14} = \frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16384}$$

Contoh 4.2 Diberikan matriks $(B_3) = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 5 \\ -7 & 6 & 5 \\ -7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$. Hitunglah $tr(B_3)^6$ dan $tr(B_3)^9$ dengan menggunakan Teorema 5.2.

Penyelesaian:

a. Akan dicari $tr(B_3)^6$.

Menurut Teorema 5.2 yaitu: $tr(B_3)^n = (a+b+c)^n$, maka:

$$tr(B_3)^6 = (-7 + 6 + 5)^6$$
$$= (4)^6 = 4096$$

b. Akan dicari $tr(B_3)^9$.

Menurut Teorema 5.2 yaitu: $tr(B_3)^n = (a+b+c)^n$, maka:

$$tr(B_3)^9 = (-7 + 6 + 5)^9$$
$$= (4)^9 = 262144$$

Contoh 4.3 Diberikan matriks $(B_3) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$. Hitunglah $(B_3)^{27}$ beserta *trace*-nya dengan menggunakan Teorema 5.1 dan Teorema 5.2.

Penyelesaian:

a. Akan dihitung nilai dari $(B_3)^{27}$ dengan menggunakan Teorema 5.1.

Berdasarkan Teorema 5.1,

$$(B_3)^n = (a+b+c)^{n-1} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

Maka hasil dari $(B_3)^{27}$ adalah sebagai berikut:

$$(B_3)^{27} = ((-4)+(-2)+(-3))^{27-1} \begin{bmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= (-9)^{26} \begin{bmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= (9)^{26} \begin{bmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

b. Akan dicari $tr(B_3)^{27}$ menggunakan Teorema 5.2 sebagai berikut:

Menurut Teorema 5.2 yaitu: $tr(B_3)^n = (a+b+c)^n$, maka:

$$tr(B_3)^{27} = (-4+(-2)+(-3))^{27}$$

$$= (-9)^{27}$$

Contoh 4.4 Diberikan matriks $(B_3) = \begin{bmatrix} 1/7 & -1/2 & 1/3 \\ 1/7 & -1/2 & 1/3 \\ 1/7 & -1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$. Hitunglah $(B_3)^{14}$ beserta *trace*-nya dengan menggunakan Teorema 5.1 dan Teorema 5.2.

Penyelesaian:

a. Akan dihitung nilai dari $(B_3)^{14}$ dengan menggunakan Teorema 5.1.

Berdasarkan Teorema 5.1:

$(B_3)^n = (a+b+c)^{k-1} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$.

Maka hasil dari $(B_3)^{14}$ adalah sebagai berikut:

$$(B_3)^{14} = (\frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3})^{14-1} \begin{bmatrix} 1/7 & -1/2 & 1/3 \\ 1/7 & -1/2 & 1/3 \\ 1/7 & -1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{42}\right)^{13} \begin{bmatrix} 1/7 & -1/2 & 1/3 \\ 1/7 & -1/2 & 1/3 \\ 1/7 & -1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

b. Akan dicari $tr(B_3)^{13}$ menggunakan Teorema 5.2 sebagai berikut:

Menurut Teorema 5.2 yaitu: $tr(B_3)^n = (a + b + c)^n$, maka:

$$tr(B_3)^{13} = \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^{13}$$

$$= \left(-\frac{1}{42}\right)^{13}$$

BAB VI
PENUTUP

6.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari pembahasan sebelumnya diketahui bahwa untuk mendapatkan *trace* matriks khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat, yang dilakukan terlebih dahulu adalah menentukan bentuk umum perpangkatan matriks tersebut. Selanjutnya menentukan *trace* matriks berpangkatnya dengan menggunakan definisi *trace* matriks.. Berikut diberikan bentuk umum dari perpangkatan matriks khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dan bentuk umum *trace* matriks berpangkatnya. Berikut diberikan kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil dan pembahasan di atas.

Diberikan matriks khusus 3×3 sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \text{ dan } B_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}, \ \forall\, a, b, c \in R$$

1. Maka bentuk umum perpangkatan matriks dan *trace* matriks dari matriks tersebut adalah:

$$(A_3)^n = (a + b + c)^{n-1} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \forall\, a, b, c \in R$$

Dan $$(B_3)^n = (a + b + c)^{n-1} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \forall\, a, b, c \in R$$

2. *Trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif adalah

$$tr(A_3)^n = tr(B_3)^n = (a + b + c)^n.$$

3. Bentuk umum perpangkatan matriks untuk perpangkatan bilangan bulat negatif tidak ada, sebab nilai determinan matriks khusus 3×3 tersebut adalah nol (0). Artinya invers matriksnya tidak ada sehingga mengakibatkan *trace* matriks khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat negatif juga tidak ada.

6.2 Saran

Penelitian ini hanya membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat. Disarankan para pembaca dapat melanjutkan hal-hal yang berhubungan dengan *trace* matriks ukuran yang lebih beasar dari 3×3 berpangkat bilangan bulat. Atau *trace* matriks dengan matriks yang lebih bervariasi.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard, *Elementary Linear Algebra, Fifth Ed.*, JohnWiley & Sons, New York,1987.

Anton, Howard & Rorres, Chris, "*Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi*", Edisi Ketujuh, Jakarta, Erlangga, 2004.

Aryani, F. & Solihin, M.,"*Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif*". Laporan tugas Akhir, 2017.

Avron,H," Counting Triangles in Large Graphs Using Randomized Matrix Trace Estimation". *Proceeding of Kdd-Ldmta*'10, 2010.

Brezinski, C, P.FikadanM.Mitrouli, Estimations ofthetraceofpowers ofpositive byextrapolation ofthe moment, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*,39,144-155, 2012.

J.E.Gentle, *Matrix Algebra*, Springer, NewYork, 2007.

J. Pahade and M. Jha, Trace of positive integer power of real 2×2 matrices, *Advancesin Linear Algebra & Matrix Theory*, 5,150-155, 2015.

K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Application, Seventh Ed.*, McGraw-Hill, Singapore, 2007.

R.Larson, *Elementary Linear Algebra, Seventh Ed.*, Brooks/Cole, Boston, 2013.

Sukirman, 2006, "*Pengantar Teori Bilangan*", Yogyakarta, Hanggar Kreator.

Zarelua, A.V. "On Congruences for the Traces of Powers of Some Matrices". *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **263**, 78-98, 2008.

F32

ORIGINALITY REPORT

30%	30%	18%	20%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	agents.felk.cvut.cz Internet Source	11%
2	demo.raww.net Internet Source	8%
3	rockpa.org Internet Source	4%
4	210.38.160.86 Internet Source	1%
5	faculty.petra.ac.id Internet Source	1%
6	www.powerco.co.nz Internet Source	1%
7	cnypca.com Internet Source	1%
8	kamincentrum.se Internet Source	<1%
9	www.math.poly.edu Internet Source	<1%

10	www.ckk-osaka.co.jp Internet Source	<1%
11	cast.erasme.org Internet Source	<1%
12	media.qgm.au.dk Internet Source	<1%
13	math.arizona.edu Internet Source	<1%
14	library.gunadarma.ac.id Internet Source	<1%
15	ca.water.usgs.gov Internet Source	<1%
16	Submitted to University of Newcastle upon Tyne Student Paper	<1%
17	www.slc.qc.ca Internet Source	<1%
18	nicmos2.as.arizona.edu Internet Source	<1%
19	ddfe.curtin.edu.au Internet Source	<1%
20	archive.org Internet Source	<1%
	www.fhws.gov.cn	

21	Internet Source	<1%
22	www.skymem.com Internet Source	<1%
23	Jakob Stoustrup, Henrik Niemann. "ACTIVE FAULT DIAGNOSIS BY TEMPORARY DESTABILIZATION", IFAC Proceedings Volumes, 2006 Publication	<1%